Développement : Intégrale de Dirichlet

RM

2022-2023

Référence :

1. Oraux X-ENS analyse tome 3

Enoncé :

En étudiant la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$, on trouve que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Résolution :

- On note $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$. Pour $x > 0$ la fonction $f(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle se prolonge par continuité en 0 par $f(x,0) = 1$ et que pour tout t tendant vers $+\infty, f(x,t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Montrons que F est aussi définie en 0. On intègre par parties; pour $X \geq 1$ on a

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t}dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}dt.$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque c'est un $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. L'intégrale entre 1 et X admet donc une limite quand X tend vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt.$$

Enfin, on a que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}$ est une intégrale faussement impropre en 0 (car $f(x,0) = 1$), donc convergente. On en déduit donc que F est définie en 0.

Il est a noté que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si tel était le cas, comme $\sin^2 \leq |\sin|$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t}$ serait intégrable sur $[1,+\infty[$. Or ce n'est pas le cas. En effet, pour $X \geq 1$, on a

$$\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t}dt = \int_1^X \frac{1-\cos 2t}{2t}dt = \frac{\ln X}{2} - \int_1^X \frac{\cos 2t}{t}dr$$

Or, $\int_1^X \frac{\cos 2t}{t}dt$ vaut $\int_2^{2X} \frac{\cos u}{u}du$ par le changement de variable $u = 2t$.
Par une intégration par parties, on montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}du$ converge si bien que

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin^2 t}{t}dt = +\infty$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge sans que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ soit intégrable.

• Montrons que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t$ pour tout $(x,t) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$, on a :

$$\forall t > 0, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|\sin t| \leq e^{-at}.$$

Comme $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cette domination nous assure que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt \\ &= -Im\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}dt\right) \\ &= -Im\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = C - \arctan x$. Comme $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $C = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

• Pour montrer que $F(0) = \frac{\pi}{2}$, il suffit donc de vérifier que F est continue en 0. Comme la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable, l'emploie directe du théorème de convergence dominée est voué à l'échec.
On va alors scindé le problème en deux puis effectuer des intégrations par parties.
On pose $F_1(x) = \int_0^1 e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$ et $F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$. La fonction F_1 est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car on dispose de la domination

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|\sin t| \leq 1.$$

et la fonction constante 1 est bien intégrable sur $]0,1]$. Vérifions la continuité de F_2 qui est la partie imaginaire de $G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t}dt$ (pour faciliter l'i.p.p) : pour $X \geq 1$, on a

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t}dt = \left[\frac{1}{i-x}\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^X + \frac{1}{i-x}\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}dt.$$

Comme $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable et

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}dt.$$

Or la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}dt$ est continue car $(x,t) \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [1,+\infty[$ et on dispose de la domination par une fonction intégrable $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. On en déduit que G est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc que F_2 est continue.
Par continuité de F_1 et F_2, on en déduit que F est continue en 0. Finalement, on obtient bien que $\lim\limits_{x\to0} F(x) = \frac{\pi}{2}$. Or $F(0)$ est la valeur cherché. On a bien

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.}$$